حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

۱. جعبهٔ A شامل پنج مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ آبی است و جعبهٔ B شامل سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی است. از هر جعبه یک مهره به تصادف بیرون کشیده شده.

الف) احتمال P را بیابید که هر دو مهره قرمز باشند.

ب) احتمال P را بیابید که یکی قرمز و یکی آبی باشد.

الف) احتمال انتخاب یک مهرهٔ قرمز از A برابر با $\frac{۵}{۸}$ و از B، $\frac{۳}{۵}$ است.

چون پیشامدها مستقل‌اند، $P=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳}{۸}$.

ب) احتمال $P_۱$ برای انتخاب یک مهرهٔ قرمز از A و یک مهرهٔ آبی از B، برابر است با: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۴}$. احتمال $P_۲$ برای انتخاب یک مهرهٔ آبی از A و یک مهرهٔ قرمز از B، برابر است با: $\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۴۰}$ بنابراین:

$$P=P_۱+P_۲=\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴۰}=\frac{۱۹}{۴۰}$$

۲. ثابت کنید: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه A^C و B^C پیشامدهایی مستقل هستند.

پاسخ: فرض کنید: $P(A)=x$ و $P(B)=y$، بنابراین: $P(A^C)=۱-x$ و $P(B^C)=۱-y$. چون A و B مستقل‌اند:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=xy$$

به‌علاوه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=x+y-xy$$

با استفاده از قانون دمورگان داریم:

$$(A\cup C)^C=A^C\cap B^C$$

بنابراین:

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=۱-P(A\cup B)=۱-x-y+xy$$

از طرف دیگر:

$$P(A^C)P(B^C)=(۱-x)(۱-y)=۱-x-y+xy$$

بنابراین: $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)\times P(B^C)$، و لذا A^C و B^C مستقل‌اند.

به طریق مشابه، ما می‌توانیم نشان بدهیم که A و B^C، همچنین، A^C و B نیز مستقل‌اند.

ترجمه برای دانش‌آموزان

Consider the following events for a family with children:

A={children of both sexes},

B={at most one boy}

(a) Show that *A* and *B* are independent events if a family has three children.

(b) Show that *A* and *B* are dependent events if a family has only two children.

(a) We have the equiprobable spase *S={bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg}*. Here

A={bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb}

and so $P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

B={bgg, gbg, ggb, ggg}

and so $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

A∩B={bgg, gbg, ggb}

and so $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

Sinc $P(A)P(B)=\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=P(A\cap B)$.

A and *B* are independent.

(b) We have the equiprobable space *S={bb, bg, gb, gg}*. Here

A= {bg, gb} and so $P(A)=\frac{1}{2}$

B= {bg, gb, gg} and so $P(B)=\frac{3}{4}$

A∩B={bg,gb} and so $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$

Since *P(A)P(B)≠P(A∩B)*, *A* and *B* are dependent.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Contain .... شامل بودن	2. Marble .... مهره، تیلۀ رنگی
3. Random .... تصادفی	4. Probability .... احتمال
5. Choosing .... انتخاب کردن	6. Event .... پیشامد
7. Independent .... مستقل	8. Furthermore .... به‌علاوه، از این گذشته
9. Similar .... مشابه	10. Demorgan's Law .... قانون دمورگان

ë Box A contains five red marbles and three blue marbles, and box B contains three red and two blue. A marble is drawn at random from each box.

(a) Find the probability p that both marbles are red.

(b) Find the probability p that one is red and one is blue.

(a) The probability of choosing a red marble from A is $\frac{5}{8}$ and from B is $\frac{3}{5}$. Since the events are independent, $P=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{8}$.

(b) The probability P_1 of choosing a red marble from A and a blue marble from B is $\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$.

The probability P_2 of choosing a blue marble from A and a red marble from B is $\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$.

Hence $P=P_1+P_2=\frac{1}{4}+\frac{9}{40}=\frac{19}{40}$.

Prove: If A and B are independent events, then A^C and B^C are independent events.

Let $P(A)=x$ and $P(B)=y$. Then $P(A^C)=1-x$ and $P(B^C)=1-y$. Since A and B are independent. $P(A\cap B)=P(A)P(B)=xy$. Furthermore,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=x+y-xy$$

By DeMorgan's law, $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$; hence

$P(A^C\cap B^C)=P(A\cup B)^C))=1-P(A\cup B)=1-x-y+xy$

On the other hand,

$P(A^C)P(B^C)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$

Thus $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$, and so A^C and B^C are independent.

In similar fashion, we can show that A and B^C, as well as A^C and B, are independent.